9.2 射影公準：量子言語における「波束の収縮」

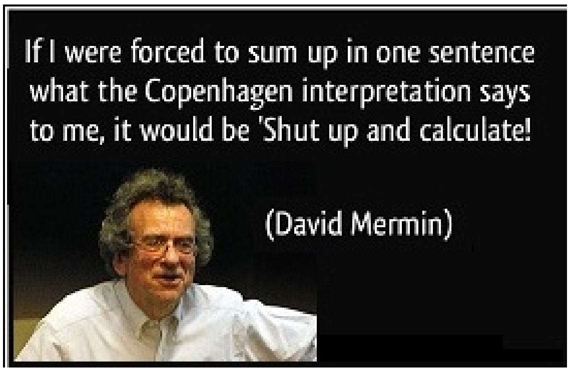
「いわゆるコペンハーゲン解釈」が意味不明なものであることは、「波束の収縮を認める派」と「認めない派」が混在していることでもわかる．これでは、「解釈」の体を成していない．すなわち、「いわゆるコペンハーゲン解釈」なんて、存在しないのだと思う．事実、マーミン (*cf.* 文献 [64]) も

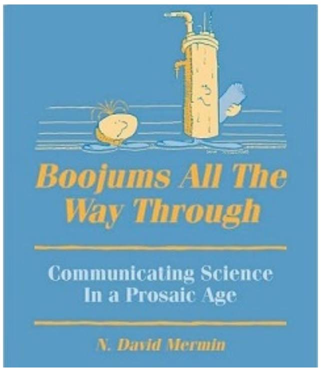
- コペンハーゲン解釈を一言で言えば、

  『ツベコベ言わずに黙って、計算せよ』

  である

と言ってるぐらいだから、いわゆるコペンハーゲン解釈など有名無実で、無いに等しいのだと思う[*1].





しかし、

- 言語的コペンハーゲン解釈では、波束の収縮について完全な解答をすることができる

以下、これを説明しよう．

量子言語では,「測定後の状態を考えない」のだから, 一般論としては波束の収縮は考えない. しかし,「波束の収縮もどきを実現させる技法」はある. (*cf.* [48]) [*2].

「コペンハーゲン解釈」を名乗るならば、射影公準「波束の収縮もどきを実現させる技法」を初めに発表すべきであったが大幅に遅れてしまった．これは、研究当初の問題意識が「統計学の二元論的定式化」とか「二元論の復権」であり、「コペンハーゲン解釈の定式化」という意識が希薄であったことに起因するが、著者の力量不足と言われればそうかもしれない．

---

*1 「『コペンハーゲン解釈』なんてない．あるのはコペンハーゲン学派 (ボーアやハイゼンベルグ等) だけで、コペンハーゲン学派のみんなの意見が一致していたわけではない．(文献 [20]D.Howard, Philosophy of Science, 71, 2004, 669-682)」という説に同意する

*2 [S. Ishikawa, Linguistic interpretation of quantum mechanics; Projection postulate, JQIS, 5(4) 2015]

9.2.1 問題：射影仮説 (フォン・ノイマン=リューダースの射影仮説)

量子基本構造 $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$ を考えよう．Λ を加算集合とする．$\mathsf{O}_P = (\Lambda, 2^\Lambda, P)$ を $B(H)$ 内の射影観測量とする．ここで、

$$P_\lambda = P(\{\lambda\}) \qquad (\forall \lambda \in \Lambda) \tag{9.9}$$

と置く．言語ルール 1 (測定: §2.7) によれば、

(A$_1$) 測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_P := (\Lambda, 2^\Lambda, P),\ S_{[\rho]})$ によって、測定値 λ_0 $(\in \Lambda)$ が得られる確率は次で与えられる：

$$\mathrm{Tr}_H(\rho P_{\lambda_0}) (= \langle u, P_{\lambda_0} u \rangle = \| P_{\lambda_0} u \|^2), \quad (\text{ where } \rho = |u\rangle\langle u|) \tag{9.10}$$

また、フォン・ノイマン=リューダースの射影仮説 (*cf.* [73, 60]) は次を要請する：

(A$_2$) 測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_P := (\Lambda, 2^\Lambda, P),\ S_{[\rho]})$ によって、測定値 λ_0 $(\in \Lambda)$ が得られたとき、測定後の状態 ρ_{post} は次で与えられる：

$$\rho_{\mathrm{post}} = \frac{P_{\lambda_0} |u\rangle\langle u| P_{\lambda_0}}{\| P_{\lambda_0} u \|^2}$$

したがって, 更なる測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_F := (X, \mathcal{F}, F),\ S_{[\rho_{\mathrm{post}}]})$ を行うとき (ここに、 O_F は $B(H)$ 内の任意の観測量), 測定値が $\Xi (\in \mathcal{F})$ に属する確率は次で与えられる：

$$\mathrm{Tr}_H(\rho_{\mathrm{post}} F(\Xi)) \Big(= \langle \frac{P_{\lambda_0} u}{\| P_{\lambda_0} u \|}, F(\Xi) \frac{P_{\lambda_0} u}{\| P_{\lambda_0} u \|} \rangle \Big) \tag{9.11}$$

ここで、次の問題を得る：

問題 9.5. ここまででもしばしば述べているように、言語的解釈では (A_2) で述べたフレーズ "測定後の状態" は無意味である．また、上 $(=(\mathrm{A}_1)+(\mathrm{A}_2))$ は同時測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_F \times \mathsf{O}_P, S_{[\rho]})$ と等しい (これは O_P と O_F が可換でなければ意味を持たない)．よって、(A_2) は一般には意味を成さない． したがって、次の問題が発生する:

(B) $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_F \times \mathsf{O}_P, S_{[\rho]})$ 内の $\mathsf{O}_F \times \mathsf{O}_P$ の代わりに如何なる観測量が選ばれるべきか？

次節でこの問題に答える．

9.2.2 フォン・ノイマン＝リューダースの射影仮説 (もどき) の導出

二つの量子基本構造 $[\mathcal{C}(H), B(H)]_{B(H)}$ と $[\mathcal{C}(H \otimes K), B(H \otimes K)]_{B(H \otimes K)}$ を考えよう．$B(H)$ 内のスペクトル分解 $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を 11.2.1 節で述べたように定める．$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をヒルベルト空間 K 内の完全正規直交系 とする．前マルコフ作用素 $\Psi_* : Tr(H) \to Tr(H \otimes K)$ を次のように定める：

$$\Psi_*(|u\rangle\langle u|) = |\sum_{\lambda \in \Lambda}(P_\lambda u \otimes e_\lambda)\rangle\langle\sum_{\lambda \in \Lambda}(P_\lambda u \otimes e_\lambda)| \quad (\forall u \in H) \tag{9.12}$$

(エンタングルメント)

または、

$$\Psi_*(|u\rangle\langle u|) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |P_\lambda u \otimes e_\lambda\rangle\langle P_\lambda u \otimes e_\lambda| \quad (\forall u \in H) \quad (\text{デコヒーレンス}) \tag{9.13}$$

したがって、マルコフ作用素 $\Psi : B(H \otimes K) \to B(H)$ (言語ルール 2(因果関係:§8.3)) を $\Psi = (\Psi_*)^*$ で定義できる．
$B(K)$ 内の射影観測量 $\mathsf{O}_G = (\Lambda, 2^\Lambda, G)$ を次のように定める：

$$G(\{\lambda\}) = |e_\lambda\rangle\langle e_\lambda| \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

ここで、$\mathsf{O}_F = (X, \mathcal{F}, F)$ を $B(H)$ 内の任意の観測量として、$B(H \otimes K)$ 内のテンソル観測量 $\mathsf{O}_F \otimes \mathsf{O}_G = (X \times \Lambda, \mathcal{F} \boxtimes 2^\Lambda, F \otimes G)$ を得る ($\mathcal{F} \boxtimes 2^\Lambda$ は積 σ-集合体)．

純粋状態 $\rho = |u\rangle\langle u|$ $(u \in H, \|u\|_H = 1)$ を固定して、測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\Psi(\mathsf{O}_F \otimes \mathsf{O}_G), S_{[\rho]})$ を考えよう．このとき、言語ルール 1 (測定; §2.7) により、次を得る

(C) $\mathsf{M}_{B(H)}(\Psi(\mathsf{O}_F \otimes \mathsf{O}_G),\ S_{[\rho]})$ によって得られる測定値 (x, λ) が $\Xi \times \{\lambda_0\}$ に属する確率は次のようになる：

$$\mathrm{Tr}_H[(|u\rangle\langle u|)\Psi(F(\Xi) \otimes G(\{\lambda_0\}))] = {}_{Tr(H)}\big(|u\rangle\langle u|, \Psi(F(\Xi) \otimes G(\{\lambda_0\}))\big)_{B(H)}$$

$$
\begin{aligned}
&={}_{Tr(H\otimes K)}\big(\Psi_*(|u\rangle\langle u|), F(\Xi)\otimes G(\{\lambda_0\})\big)_{B(H\otimes K)}\\
&=\mathrm{Tr}_{H\otimes K}[(\Psi_*(|u\rangle\langle u|))(F(\Xi)\otimes G(\{\lambda_0\}))]\\
&=\mathrm{Tr}_{H\otimes K}[(|\sum_{\lambda\in\Lambda}(P_\lambda u\otimes e_\lambda)\rangle\langle\sum_{\lambda\in\Lambda}(P_\lambda u\otimes e_\lambda)|)(F(\Xi)\otimes|e_{\lambda_0}\rangle\langle e_{\lambda_0}|)]\\
&=\langle P_{\lambda_0}u, F(\Xi)P_{\lambda_0}u\rangle \quad (\forall\Xi\in\mathcal{F})
\end{aligned}
$$

((9.13) の場合も同じように計算できる).
したがって、次を結論できる.

(D_1) もし $\Xi = X$ ならば、次が成立する：

$$
\mathrm{Tr}_H[(|u\rangle\langle u|)\Psi(F(X)\otimes G(\{\lambda_0\}))] = \langle P_{\lambda_0}u, P_{\lambda_0}u\rangle = \|P_{\lambda_0}u\|^2 \tag{9.14}
$$

(D_2) 測定値 (x,λ) が $X\times\{\lambda_0\}$ に属したとき、$x\in\Xi$ である条件付き確率は、次で与えられる：

$$
\frac{\langle P_{\lambda_0}u, F(\Xi)P_{\lambda_0}u\rangle}{\|P_{\lambda_0}u\|^2}\Big(=\langle\frac{P_{\lambda_0}u}{\|P_{\lambda_0}u\|}, F(\Xi)\frac{P_{\lambda_0}u}{\|P_{\lambda_0}u\|}\rangle\Big) \quad (\forall\Xi\in\mathcal{F}) \tag{9.15}
$$

ここで、観測量 O_F は任意であったことに注意しよう. また、上 (i.e., 射影仮説 (D)) は言語ルール 1 と 2 の帰結であることにも注意しよう

対応 (A) ⇔ (D)、すなわち、

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_P, S_{[\rho]})\ \Big(\text{or, 無意味な } \mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_F\times\mathsf{O}_P, S_{[\rho]})\Big)\\
\Leftrightarrow&\mathsf{M}_{B(H)}(\Psi(\mathsf{O}_F\otimes\mathsf{O}_G), S_{[\rho]}),
\end{aligned}
$$

つまり,

$$
(9.9)\Leftrightarrow(9.14),\quad (9.11)\Leftrightarrow(9.15)
$$

の下に、(A) の真の意味は (D) であると結論することには一理ある. ここで、禁句「測定後の状態」が (D_2) では使われていないことを確認せよ. したがって、問題 9.5 の解答は $\Psi(\mathsf{O}_F\otimes\mathsf{O}_G)$ である.

注意 9.6. いわゆるコペンハーゲン解釈は、「測定後の状態 (i.e., 波束の収縮)」を認めている (*cf.* [20]). そうならば、読者は、(D_2) の帰結として、観測量 O_F の任意性より「測定後の状態 $=\frac{P_{\lambda_0}|u\rangle\langle u|P_{\lambda_0}}{\|P_{\lambda_0}u\|^2}$」と結論するかもしれない. しかし、言語的解釈「測定は一回だけ」では、この結論は間違いである. もし「測定後の状態」を認めてしまったら、困った問題が続出する. たとえば、「測定はいつ成されたのか？」、「波束の収縮はいつ起きるのか？、　その速さは？」等であり、これらは当然のことであるが、言語ルール 1 と 2 の範囲外である. 量子言語は言語なのだか

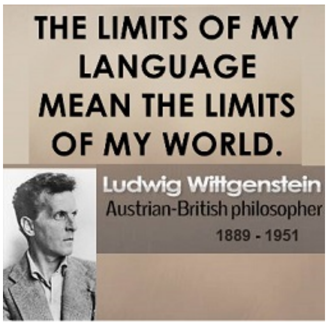
ら、ウィトゲンシュタインの言葉

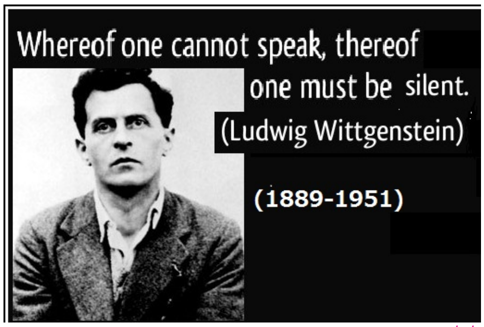
The limits of my language mean the limits of my world
(私の言語の限界が、私の世界の限界)

とか

What we cannot speak about we must pass over in silence.
(語りえぬものには、沈黙しなければならない)

を思い出すべきである.





////

議論 (A_2) は間違っているわけであるが、「(A_2) を正しい議論 (D_2) の省略形と見なす」ならば (A_2) は使える. これを射影仮説 9.7 として、以下に述べておく.

仮説 9.7. **[射影仮説]** 命題 (A_2) (= フォン・ノイマン=リューダースの射影仮説) は間違いである. しかしながら, 上の (D_2) の意味で, 命題 (A_2) を使うならば記述が簡潔になる. すなわち、(D_2) の意味で次のような記述をしばしば行う:

(E) 測定 $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_P := (\Lambda, 2^\Lambda, P), S_{[\rho]})$ によって, 測定値 λ_0 $(\in \Lambda)$ が得られたとき、測定後の状態 ρ_{post} は次で与えられる：

$$\rho_{\mathrm{post}} = \frac{P_{\lambda_0}|u\rangle\langle u|P_{\lambda_0}}{\|P_{\lambda_0}u\|^2} \tag{9.16}$$